Olimpiada de matematică – etapa pe sector
21 februarie 2004

SOLUȚII ŞI BAREM DE CORECTARE
Clasa a XI-a

Subiectul I

a) 3 p

$x_{n+1} \le \sqrt[k]{(kx_n + 1 - k)\cdot \underbrace{1\cdot 1\cdot \ldots \cdot 1}_{(k-1)\text{ factori}}} \le x_n$, $\forall\ n \ge 1$.

$(x_n)_{n\ge 1}$ descrescător şi minorat de zero $\Rightarrow (x_n)_n$ convergent.

Fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $l \ge 0$. Trecând la limită în relația dată obținem $l^k \le kl + 1 - k \Rightarrow$

$\Rightarrow l^k - 1 - k(l-1) \le 0 \Rightarrow (l-1)(l^{k-1} + l^{k-2} + \ldots + l + 1) \le 0$. Dacă $l \in [0,1) \cup (1, +\infty)$ ajungem la contradicție. Deci $l = 1$.

b) 4 p

Pentru $x = 0$ obținem $f(0) = \dfrac{c}{1-b}$. 1 p

$f(ax) = \dfrac{1}{b}\cdot f(x) - \dfrac{c}{b}$

$f(a^2x) = \dfrac{1}{b}\cdot f(ax) - \dfrac{c}{b}$

……..

$f(a^n x) = \dfrac{1}{b}\cdot f(a^{n-1}\cdot x) - \dfrac{c}{b}$. Înmulțind aceste egalități cu $\dfrac{1}{b^{n-1}}$, $\dfrac{1}{b^{n-2}}$, ..., $\dfrac{1}{b}$, 1 şi adunând obținem:

$f(a^n \cdot x) = \dfrac{1}{b^n}\cdot f(x) - \dfrac{c}{b}\cdot(1 + \dfrac{1}{b} + \ldots + \dfrac{1}{b^{n-1}}) = \dfrac{1}{b^n}\cdot f(x) + \dfrac{c}{1-b}\cdot(1 - \dfrac{1}{b^n})$ 1 p

Cum $a^n \cdot x \xrightarrow{n} 0$ şi $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\exists\ M > 0$ a.î. $|f(x)| \le M$ pe o vecinătate $V \in \mathcal{V}(0)$

rezultă că $f(a^n x) \xrightarrow{n} f(0)$ deci $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, adică *f* este continuă în $x = 0$. 1 p

Subiectul II

a) 2 p

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} = a\cdot I_3 + b\cdot A + c\cdot A^2$$

b) 5 p

$X \in C(A) \Rightarrow X^n \in C(A)$, $\forall\, n \geq 1$; $X \in C(A)$ şi $X^2 = O_3 \Rightarrow a^2 + 2bc = 0$, $b^2 + 2ac = 0$, $c^2 + 2ab = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$ deci $X = 0$.

$X^{2004} = O_3 \Rightarrow X^{2^{11}} = O_3 \Rightarrow X^{2^{10}} = O_3 \Rightarrow ... \Rightarrow X = O_3$

Subiectul III 7 p

Ecuaţiile canonice sunt:

$d_1 : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$,

$d_2 : \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$.

Vectorii divectori sunt $\vec{V}_1 = (1,\ 1,\ -1)$, $\vec{V}_2 = (1,\ 0,\ 1)$. Ei nefiind proporţionali rezultă că $\vec{V_1} \nparallel \vec{V_2}$. Sistemul format din cele 4 ecuaţii fiind incompatibil rezultă că $d_1 \cap d_2 = \varnothing$. 3 p

Fie $\mathrm{M} \in d_1$, $\mathrm{N} \in d_2$; $\mathrm{M}(k,\ k,\ -k+1)$, $\mathrm{N}(t,\ 0,\ t)$, $k, t \in \mathbb{R}$.

Pentru a determina dreapta comună perpendiculară se impun condiţiile $\overrightarrow{MN} \cdot \vec{V}_1 = 0$ şi $\overrightarrow{\mathrm{MN}} \cdot \vec{V_2} = 0$.

$\overrightarrow{\mathrm{MN}} = (t-k,\ t+k-1)$; obţinem $k = \frac{1}{3},\ t = \frac{1}{2}$; $\mathrm{M}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\mathrm{N}\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$; fie P mijlocul segmentului [MN]; $\mathrm{P}\left(\frac{5}{12}, \frac{1}{6}, \frac{7}{12}\right)$; planul căutat conţine punctul P şi are pe $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ ca vector normal; $\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right)$.

Deci $\frac{1}{6}\left(x - \frac{5}{12}\right) - \frac{1}{3}\left(y - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{6}\left(z - \frac{7}{12}\right) = 0 \Rightarrow 2x - 4y - 2z + 1 = 0$. 4 p

Subiectul IV

Cum o funcţie monotonă are limite laterale în toate punctele de acumulare ale domeniului de definiţie $\Rightarrow \exists\, L_1 = \lim\limits_{u \searrow -\infty} f(u)$ şi $L_2 = \lim\limits_{t \searrow a} f^{-1}(t)$. Arătăm că $L_1 = a$ şi $L_2 = -\infty$. Fie $t \in (a, b)$, $\forall\, u \in \mathbb{R}$, $u < f^{-1}(t) \Rightarrow f(u) < t \Rightarrow \lim\limits_{u \searrow -\infty} f(u) \leq t$, adică $L_1 \leq t$.

Făcând $t \searrow a$, obţinem $L_1 \leq a$. Dar $f(u) \in (a, b) \Rightarrow L_1 \in \left[a, b\right]$, deci $L_1 \geq a$. Din $L_1 \leq a$, $L_1 \geq a$ rezultă $L_1 = a$. 2 p

(2 p) Se vor acorda pentru cealaltă egalitate.

Finalizare 3 p